Chapitre 2
Ensembles

Plan du chapitre

1 Ensembles

1.1 Définitions, ensembles usuels

La notion d'ensemble est une notion primordiale dans le formalisme moderne des mathématiques. On ne cherchera pas à en donner une définition précise, et on s'en tiendra à une notion “intuitive”.

Définition 2.1

Un ensemble est un regroupement d'objets (réels, entiers, fonctions, ...), appelés élements de l'ensemble en question.

- $x \in E$ se lit “x appartient à E” : cela signifie que x est un élément de l'ensemble E.
- $x \notin E$ se lit “x n'appartient pas à E” : cela signifie que x n'est pas un élément de l'ensemble E.

Rappelons brièvement quelques ensembles usuels, à savoir $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Exemple 1 (Ensembles usuels)**.**

1. $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, càd des entiers positifs. $\mathbb{N}$ a donc pour éléments 0, 1, 2, ...
2. $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs, càd de tous les entiers, quel que soit leur signe. $\mathbb{Z}$ a donc pour éléments 0, 1, -1, 2, -2, ...
3. $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, càd de tous les nombres qui s'écrivent sous la forme d'une fraction $\dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et b non nul. Par exemple, $\dfrac{-1}{7} \in \mathbb{Q}$ mais $\pi \notin \mathbb{Q}$.
4. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, càd des nombres qui s'écrivent avec un nombre fini ou infini de décimales [1].

1. La définition précise de $\mathbb{R}$ est hors-programme.

1.2 Construction d'ensembles

On peut construire des ensembles de plusieurs façons :

- En extension – on donne explicitement tous les éléments :

$$A = \{-1, 0, 1\} \qquad B = \{1, 2, \cdots, 500\} = [\![1, 500]\!]$$

- En compréhension – on donne un ensemble "plus gros" puis on précise une propriété qui caractérise les éléments, par exemple :

$$\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} \qquad \text{idem pour } \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*$$

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \qquad \text{idem pour } \mathbb{R}_-$$

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

- Avec un paramètre – L'ensemble est défini par les valeurs prises par une expression lorsqu'un paramètre parcourt un autre ensemble. Par exemple

$$2\mathbb{N} := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad 2\mathbb{Z} :=$$
$$2\mathbb{N}+1 := \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad 2\mathbb{Z}+1 :=$$

$$\mathbb{R}_+ = \left\{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x^2 \mid x \in \mathbb{R}_+\right\}$$

Enfin, il existe un ensemble très particulier dont la définition découle peu ou prou d'un axiome :

Définition 2.2 (Ensemble vide)

On admet l'existence d'un ensemble qui ne contient aucun élément. C'est l'ensemble vide. On le note $\varnothing$.

Remarque. Contrairement aux listes de Python, un ensemble ne tient pas compte des répétitions ni de l'ordre de ses éléments : ainsi

$$\{1, 2, 1\} = \{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 2, 2, 2, \ldots\}$$

1.3 Égalité et inclusion

Définition 2.3

Soit E et F deux ensembles.

- E est dit un singleton s'il ne contient qu'un seul élément.
- Un ensemble est dit fini s'il possède un nombre fini d'éléments. Sinon, il est dit infini.
- E et F sont dits égaux, et on note $E = F$, si E et F ont exactement les mêmes éléments.
- E est inclus dans F, et on note $E \subset F$, si $\forall x \in E \qquad x \in F$. On dit également que E est un sous-ensemble ou une partie de F.
- Si E n'est pas inclus dans F, on note $E \not\subset F$.

Exemple 2. Pour tout ensemble E, on a $E \subset E$ et $\varnothing \subset E$ (ceci sera justifié en partie 1.6).
Pour tout $x \in E$, le singleton $\{x\}$ est une partie de E.

Remarque. Attention ! On ne doit pas confondre **l'élément** x qui **appartient** à E avec la **partie** $\{x\}$ qui est **incluse** dans E. On a ainsi

$$0 \in \mathbb{N} \qquad \{0\} \subset \mathbb{N} \qquad \text{mais} \qquad 0 \not\subset \mathbb{N} \qquad \{0\} \notin \mathbb{N}$$

Exemple 3. Compléter les pointillés par $\in, \ni, \subset, \supset$ (si un de ces symboles convient) ou par $\notin, \not\ni, \not\subset, \not\supset$ (dans le cas contraire).

$$\mathbb{Z} \ldots\ldots -6$$
$$[\![0,5]\!] \ldots\ldots [0,5]$$
$$\frac{456789}{6} \ldots\ldots \mathbb{Z}$$
$$\mathbb{R}_+ \ldots\ldots \mathbb{R}_-$$
$$\sqrt{18} \ldots\ldots \left\{3\sqrt{2}\right\}$$

$$\left\{\sqrt{2}\right\} \ldots\ldots \mathbb{Q}$$
$$2\mathbb{N} \ldots\ldots 2\mathbb{Z}$$
$$\left\{\sqrt{x} \mid x \in \mathbb{R}_+\right\} \ldots\ldots \mathbb{Z}$$
$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2+x+1=0\right\} \ldots\ldots \{0\}$$
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\right\} \ldots\ldots \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Propriété 2.4

Soit A, B et C trois ensembles.

$$A = B \Longleftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A$$
$$(A \subset B \text{ et } B \subset C) \implies A \subset C$$

Méthode (Raisonnement par double inclusion)

Le fait que

$$A = B \Longleftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A$$

permet ainsi de montrer que deux ensembles sont égaux en montrant que chacun est inclus dans l'autre (ce qui est souvent plus facile). On dit qu'on raisonne par double inclusion.

Définition 2.5

On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Autrement dit

$$A \in \mathscr{P}(E) \iff A \subset E$$

Remarque. On a toujours $E \in \mathscr{P}(E)$ et $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$.

Exemple 4. Si $E = \{1,2\}$ on a

$$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

Exemple 5. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Compléter.

$$E = \{17\} \implies \mathscr{P}(E) = \ldots\ldots$$

$$E = \{a,b,c\} \implies \mathscr{P}(E) = \ldots\ldots$$

$$E = \varnothing \implies \mathscr{P}(E) = \ldots\ldots$$

1.4 Ensembles produits

Définition 2.6

- Étant donnés x et y deux objets mathématiques quelconques (par exemple x est un réel et y une suite...), on définit un nouvel objet mathématique, le couple (x,y).

$$(x,y)=(x',y') \qquad \text{signifie} \qquad x=x' \quad \text{et} \quad y=y'$$

- On définit de même les triplets (x,y,z), quadruplets (x,y,z,t), et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, les n-uplets $(x_1,x_2,...,x_n)$.

$$(x_1,\cdots,x_n)=(y_1,\cdots,y_n) \qquad \text{signifie} \qquad \forall i\in[\![1,n]\!] \quad x_i=y_i$$

Attention, les n-uplets tiennent compte de l'ordre : $(1,2)\neq(2,1)$.

Par ailleurs, on ne doit pas confondre $\{(1,2)\}$, qui est un singleton qui contient le couple $(1,2)$, et l'ensemble $\{1,2\}$ qui contient deux éléments.

Définition 2.7 (Ensembles produits)

- A et B étant deux ensembles, on note $A\times B$ l'ensemble des couples (a,b), où $a\in A$ et $b\in B$. Cet ensemble est appelé produit cartésien de A et B.
- Plus généralement, étant donnés $n\in\mathbb{N}^*$ et $A_1,A_2,\cdots,A_n$ des ensembles, on définit leur produit cartésien par

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\left\{\ (a_1,...,a_n)\ \middle|\ a_1\in A_1,\quad a_2\in A_2,\quad \cdots\quad a_n\in A_n\ \right\}$$

On note généralement $A^2:=A\times A$, et plus généralement, si $n\in\mathbb{N}^*$,

$$A^n:=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n\text{ fois}}$$

Cette année on parlera notamment des ensembles $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou encore $\mathbb{R}^n$.

Exemple 6. On pose $A=\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ et $B=\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$. A-t-on $A\subset B$ ou $B\subset A$?

1.5 Opérations sur les ensembles

Définition 2.8

Soit A,B,E trois ensembles avec $A,B\subset E$.

- **Intersection $\cap$:** $A\cap B:=\{x\in E\mid x\in A \text{ et } x\in B\}$.
- **(Ré)union $\cup$:** $A\cup B:=\{x\in E\mid x\in A \text{ ou } x\in B\}$. Pour rappel le "ou" est inclusif (cf dessin).
- **Différence :** $A\setminus B:=\{x\in A\mid x\notin B\}$.
- **Complémentaire :** $E\setminus A=\{x\in E\mid x\notin A\}$. Si cela ne pose aucune ambiguité, on le note parfois A^c ou $\overline{A}$.

Exemple 7.

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels.
- $\mathbb{R}_+^* := \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ et idem pour $\mathbb{R}_-^*$.

Exemple 8. Déterminer les ensembles suivants (les complémentaires étant dans $\mathbb{R}$) :

$$\overline{\mathbb{R}_+} = \ldots\ldots \qquad \overline{[1,+\infty[} = \ldots\ldots \qquad \overline{[3,5[} = \ldots\ldots$$

Définition 2.9

Deux ensembles A et B sont dits disjoints si $A \cap B = \varnothing$.
Une partition d'un ensemble E est une famille de sous-ensembles $A_1, A_2, \cdots, A_n$ de E vérifiant :

- $E = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, ou encore $E = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
- $\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$.

Exemple 9. $2\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}+1$ forment une partition de $\mathbb{N}$.
$\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-^*$ forment une partition de $\mathbb{R}$.

Remarque (Disjonction de cas)**.** Si $A_1, \cdots, A_n$ forment une partition d'un ensemble E, alors

$$\begin{aligned}\forall x \in E \quad P(x) \quad &\iff \begin{cases} \forall x \in A_1 \quad P(x) \\ \cdots \\ \forall x \in A_n \quad P(x) \end{cases} \\ &\iff \forall i \in [\![1, n]\!] \quad \forall x \in A_i \qquad P(x)\end{aligned}$$

Propriété 2.10

Soit A, B, C des parties d'un ensemble E.

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (on peut donc écrire $A \cap B \cap C$ sans ambiguïté)
- $A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cap A = A$
- $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (on peut donc écrire $A \cup B \cup C$ sans ambiguïté)
- $A \cup \varnothing = A, \quad A \cup A = A$
- $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$

Distributivité de $\cap$ sur $\cup$ et réciproquement :

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- $\overline{(\overline{A})} = A$
- $A \subset B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Démonstration. Soit $x \in E$. On reformule les énoncés grâce à la correspondance "logique-ensemble" ci-dessous :

Ensemble	$(x \in E)$	Logique
$x \in A \cup B$	équivaut à	$x \in A$ ou $x \in B$
$x \in A \cap B$	équivaut à	$x \in A$ et $x \in B$
$x \in \overline{A}$	équivaut à	non$(x \in A)$
$A \subset B$	équivaut à	$x \in A \implies x \in B$
$A = B$	équivaut à	$x \in A \iff x \in B$

Les propriétés à démontrer se déduisent alors de propriétés vues au chapitre précédent.

□

1.6 Complément : ensemble et logique

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un élément x d'un ensemble quelconque. Par convention :

- "$\forall x \in \varnothing \quad P(x)$" est toujours *vrai*.
- "$\exists x \in \varnothing \quad P(x)$" est toujours *faux*.

C'est cette convention qui fait que $\varnothing \subset E$ pour tout ensemble E. Elle entraine aussi le fait que "Faux $\implies$ ..." est vrai. En effet, pour deux propositions P et Q dépendant d'une variable x dans E :

$$(\forall x \in E \quad P(x) \implies Q(x)) \quad \iff \quad \{x \in E \mid P(x)\} \subset \{x \in E \mid Q(x)\}$$

Ainsi, si $P(x)$ est fausse pour tout x de E, l'inclusion de droite se réécrit "$\varnothing \subset \ldots$", ce qui est toujours vrai.

2 Méthodes pour les exercices

Méthode

a) **Pour montrer que $E \subset F$.** On considère un élément quelconque de E et on montre qu'il appartient à F.

b) **Pour montrer que $E = F$.** Il est fréquent de raisonner par double inclusion (on montre $E \subset F$ et $F \subset E$).